

Transmisión Digital

Tema 6. Modulaciones en espectro ensanchado por secuencia directa

José Ignacio Ronda Prieto, GTI-SSR-ETSIT-UPM

1 de diciembre de 2015



Contents

- 1 Introducción
- 2 Análisis del ruido y la IES
- 3 Detección multiusuario
- 4 Secuencias utilizadas en DS-CDMA

Preámbulo

Copyright

Modulaciones en espectro ensanchado por secuencia directa

Copyright (C) 2015 Algunos derechos reservados. José Ignacio Ronda Prieto <jir@gti.ssr.upm.es>

Versión 1.0, noviembre de 2015.

Licencia de distribución

Este trabajo se distribuye bajo una licencia *Creative Commons* Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 3.0 España (CC-BY-SA-NC).

Para ver una copia de esta licencia, visite la página de la licencia

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es>

o envíe una carta a Creative commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, EEUU.

Estos apuntes se hacen públicos con la intención de que sean útiles. Aunque se ha tenido cuidado durante su preparación no puede descartarse que aún contengan errores. El autor no garantiza que el contenido de estos apuntes esté libre de errores.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain License. To view a copy of this licence, visit

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es>

or send a letter to Creative commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

These notes are provided in the hope they are useful. While caution has been taken during its preparation, it is possible that notes still contain some errors. There is absolutely no warranty about its contents.

Resumen de la licencia:

Está permitido

Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.

Hacer obras derivadas.

Bajo las siguientes condiciones:

Reconocimiento: Se deben reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador.

No comercial: No se uede utilizar esta obra para fines comerciales.

Compartir bajo la misma licencia: Si se altera o se transforma esta obra, o se genera una obra derivada, sólo se puede distribuir la obra generada bajo una licencia similar a ésta.

Introducción

Una señal $g(t)$ que dé lugar a un sistema poco sensible al multitrayecto debe ser aproximadamente ortogonal a sus versiones desplazadas arbitrariamente, es decir

$$\langle g(t + \tau), g(t) \rangle \ll \mathcal{E}_g, \tau \neq 0$$

es decir,

$$R_g(\tau) = \langle g(t + \tau), g(t) \rangle \approx \text{cte} \cdot \delta(\tau) \Leftrightarrow |G(\omega)|^2 \approx \text{cte}$$

Por lo tanto debemos utilizar señales con gran ancho de banda.

Introducción

Vamos a definir una señal $g(t)$ que

- además de tener densidad espectral de energía $|G(\omega)|^2$ aproximadamente constante y gran ancho de banda
- permite la compartición del espectro por otras señales del mismo tipo (code-division multiple access (CDMA))
- permite un procesamiento esencialmente discreto

Idea básica: Generar por procesamiento discreto señales similares al ruido

Introducción

Consideramos señales 4-QAM

$$s(t) = \sum_n A[n]g(t - nT), A[n] = \pm 1 \pm j$$

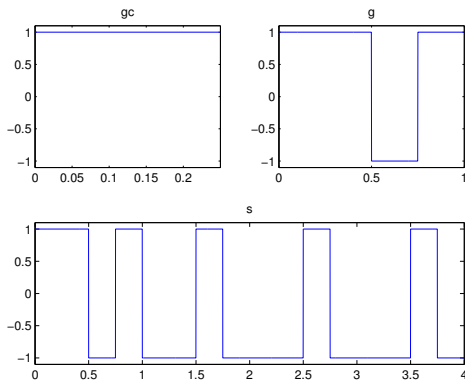
con señal básica

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]g_c(t - mT_c)$$

- $x[m]$ (**secuencia de ensanchamiento (spreading)**) toma valores ± 1 y $T_c = T/N_c$, N_c entero mucho mayor que uno (en la práctica, al menos 16). T_c se denomina **tiempo de chip**.
- $g_c(t)$ cumple la condición de Nyquist para T_c

Introducción

Ejemplo de señales $g_c(t)$ (pulso cuadrado), $g(t)$ (dada por $x[n] = 1, 1, -1, 1$) y $s(t)$ (para $A[n] = 1, -1, -1, -1$)



Introducción

La señal discreta $x[m]$, $m = 0, \dots, N - 1$ se elige para que sea **aproximadamente ortogonal a sus versiones desplazadas** (que es equivalente a que $g(t)$ sea aproximadamente ortogonal a sus versiones desplazadas múltiplos enteros de T_c):

$$R_x[k] = \langle x[m+k], x^*[m] \rangle = \sum_{m=0}^{N_c-1} x[m+k]x^*[m] = \begin{cases} N & k = 0 \\ \ll N & k \neq 0 \end{cases}$$

Es decir,

$$R_x[k] \approx N\delta[k]$$

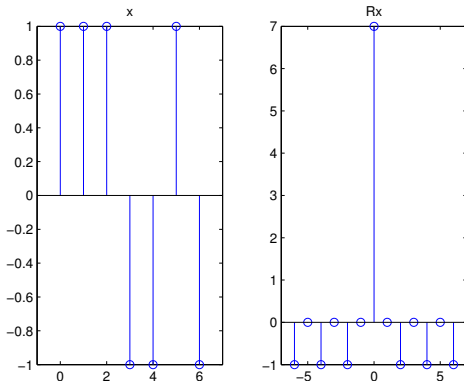
Introducción

Las **secuencias de Barker** son óptimas en este sentido, cumpliendo

$R_x[k] \leq 1$ para $k \neq 0$.

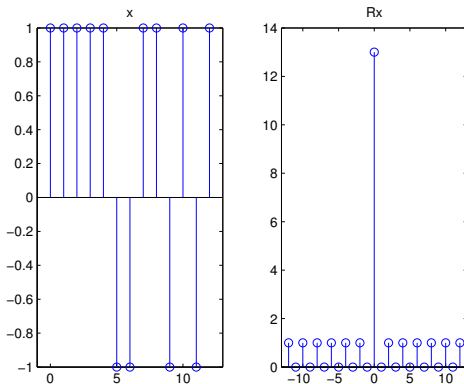
Desgraciadamente sólo se conocen para $N_c \leq 13$.

Secuencia de Barker de longitud 7 y su autocorrelación



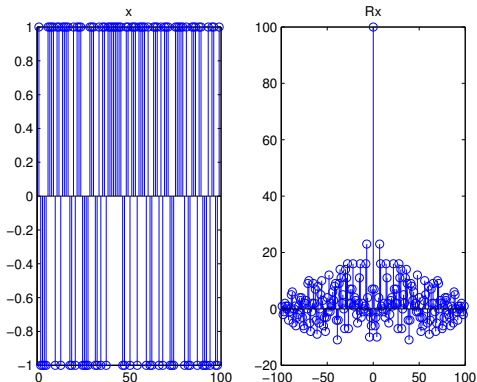
Introducción

Secuencia de Barker de longitud 13 y su autocorrelación



Introducción

Para longitudes grandes se pueden utilizar secuencias aleatorias.



Al final del tema veremos cómo se pueden generar de forma determinista secuencias con características parecidas a las de las aleatorias.

Espectro de $g(t)$

- El pulso de la modulación DS-CDMA que hemos descrito tiene TF (definida en ω)

$$G(\omega) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] G_c(\omega) e^{-jm\omega T_c} = X(e^{j\omega T_c}) G_c(\omega)$$

- El ancho de banda será el de $g_c(t)$ puesto que

$$|X(e^{j\omega})|^2 = \mathcal{F}[R_x[m]] \approx \mathcal{F}[N\delta[m]] = N$$

- Si $g_c(t)$ es un pulso estrecho, su densidad espectral de energía $|G_c(\omega)|^2$ será aproximadamente constante en su ancho de banda, luego tenemos una señal con el tipo de espectro deseado.

Densidad espectral de potencia

- Al igual que para el ruido, también se puede definir la **densidad espectral de potencia (DEP) de una modulación**.
- Como en el caso del ruido, es la función cuya integral en $[\omega_1, \omega_2]$ nos indica la potencia de la señal a la salida del filtro paso-banda correspondiente cuando a la entrada tiene la señal global de la modulación.
- En el caso de una modulación unidimensional $s(t) = \sum_n A[n]g(t - nT)$, con $A[n]$ independientes de media nula y varianza σ_A^2 la DEP vale

$$S_s(\omega) = \frac{1}{T} \sigma_A^2 |G(\omega)|^2$$

- Por tanto tenemos

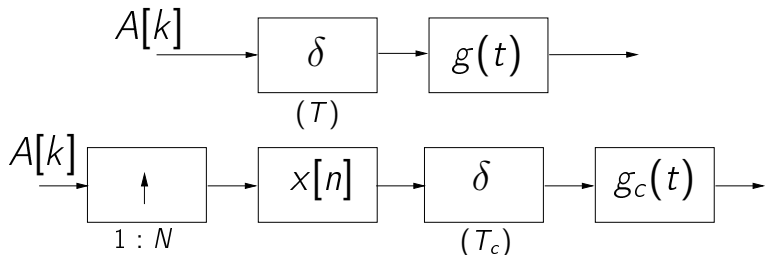
$$S_s(\omega) = \frac{1}{T} \sigma_A^2 \left| X(e^{j\omega T_c}) \right|^2 |G_c(\omega)|^2 \approx \frac{1}{T} \sigma_A^2 N |G_c(\omega)|^2$$

Observamos que el máximo ancho de banda está limitado por el de $g_c(t)$.

Transmisor

Para que la parte analógica del Tx sea lo más sencilla posible,

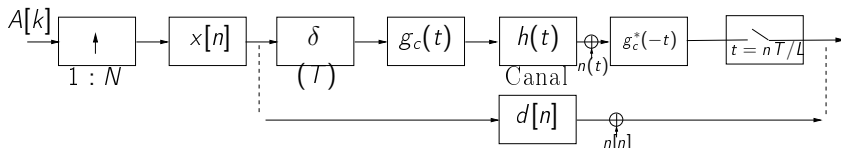
- en lugar de generar una delta $A[k]\delta(t - kT)$ y filtrarlo con $g(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]g_c(t - mT_c)$ (figura, arriba)
- generamos $A[k] \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\delta(t - mT_c)$ (inserción de ceros y filtrado discreto) y filtramos con $g_c(t)$ (figura, abajo).



Modelo de Tx y Rx

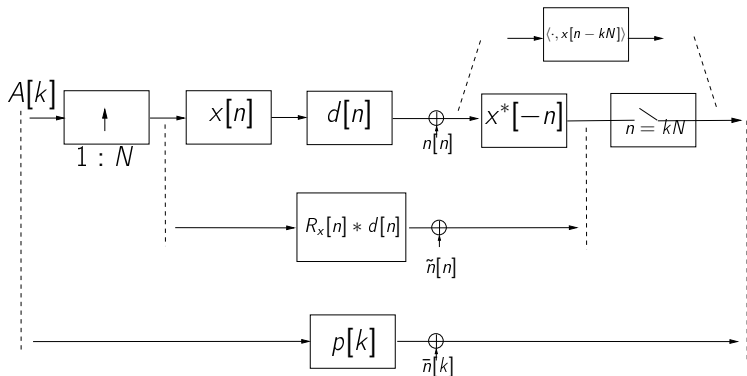
Receptor

- La señal pasa por un canal $h(t)$.
- El receptor la filtra con $g_c^*(-t)$ y muestrea en $t = kT_c$.
- Los bloques entre la generación del tren de deltas en el transmisor y el muestreo en el receptor constituyen un sistema lineal e invariante de tiempo discreto más ruido.
- Como $g_c(t)$ cumple la condición de Nyquist, el ruido discreto $n[m]$ es blanco.
- El sistema resultante es como un sistema de transmisión digital unidimensional de los estudiados en el tema 1, pero basado en señales discretas.



Modelo de Tx y Rx

Como hicimos en el Tema 5 para el sistema basado en señales continuas, consideramos un **receptor basado en filtro adaptado a la señal**.



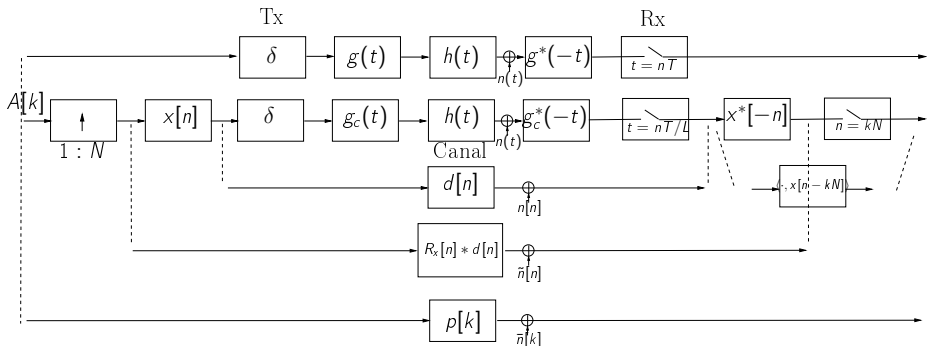
Los dos diagramas de arriba son vistas del sistema a **nivel de chip**, y el de abajo, una vista del sistema a **nivel de señal**.

Modelo de Tx y Rx

En cuanto al ruido, como $x[m]$ cumple la condición de Nyquist, el ruido en el sistema submuestreado equivalente es blanco.

Modelo de Tx y Rx

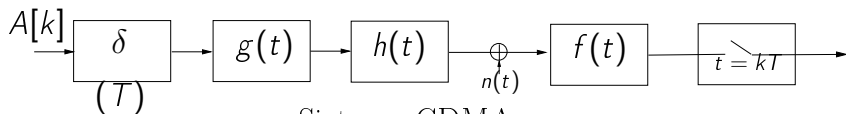
El mismo sistema, más desarrollado



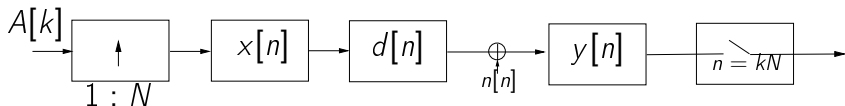
Modelo de Tx y Rx

El modelo discreto a nivel de chip es análogo a un sistema PAM de tiempo continuo, pero de tiempo discreto.

Sistema PAM

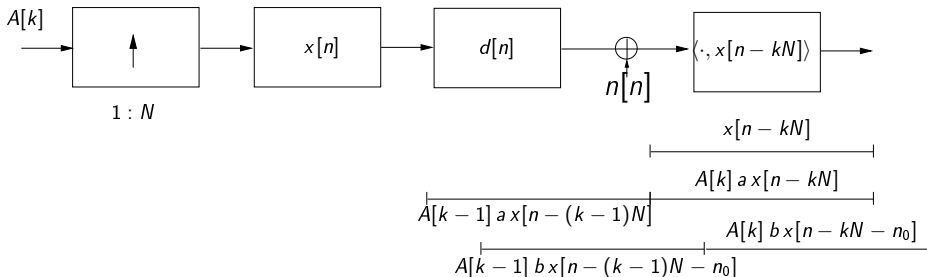


Sistema CDMA



Efecto del canal

Canal $d[m] = a\delta[m] + b\delta[m - m_0]$, $0 < m_0 < N$



Las tramas no alineadas dan producto escalar despreciable: El resultado del producto escalar es aproximadamente $aNA[k]$.

(Los segmentos representan la señal con la que se calcula el producto escalar, la señal recibida sin retardo y la señal recibida con retardo.)

Efecto del canal

Queremos calcular la respuesta del canal discreto equivalente a nivel de señal

$$p[k] = R_x[m] * d[m]|_{m=kN}$$

Como

$$d[m] = a \delta[m] + b \delta[m - m_0]$$

tenemos

$$p[k] = a R_x[m] + b R_x[m - m_0]|_{m=kN} = a R_x[kN] + b R_x[kN - m_0]$$

Como $R_x[m]$ es nulo fuera de $m = -N + 1, \dots, N - 1$, sólo hay dos muestras no nulas:

$$\begin{aligned} p[k] &= (a R_x[0] + b R_x[-m_0]) \delta[k] + b R_x[N - m_0] \delta[k - 1] \\ &\approx a R_x[0] \delta[k] = N a \delta[k] \end{aligned}$$

Recepción adaptada al multicamino

La **detección óptima** de la señal discreta recibida

$$r[m] = \sum_n A[n] \tilde{x}[m - nN] + n[m], \quad \tilde{x}[m] = x[m] * d[m]$$

no es la basada en los productos escalares con $x[m - nN]$ sino en los productos escalares con la señal distorsionada por el canal $\tilde{x}[m - nN]$,

$$\langle r[m], \tilde{x}[m - nN] \rangle = r[m] * \tilde{x}^*[-m]|_{m=nN}$$

(en el caso continuo (tema 5) no se hizo así para simplificar el tratamiento.)

Recepción adaptada al multicamino

Es fácil comprobar (p. ej., con la transformada de Fourier (ejercicio)) que

$$\tilde{x}^*[-n] = x^*[-n] * d^*[-n]$$

La composición de $x[n]$, $d[n]$ y $x^*[-n]$ da como resultado

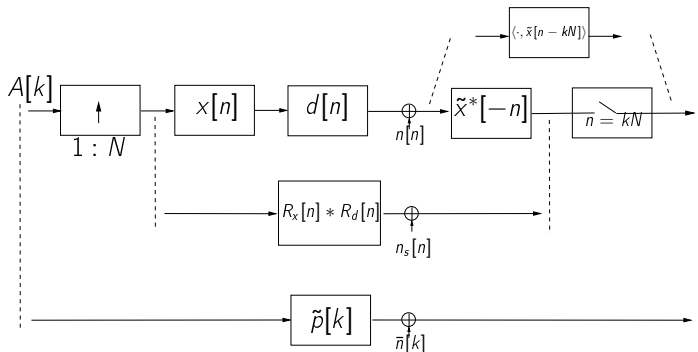
$$x[n] * d[n] * x^*[-n] * d^*[-n] = r_x[n] * r_d[n]$$

con lo que el canal discreto a nivel de señal tiene respuesta

$$\tilde{p}[k] = R_x[n] * R_d[n]|_{n=kN}$$

Recepción adaptada al multicamino

Sistema global con receptor basado en filtro adaptado a la señal y al canal.



El ruido $\bar{n}[k]$ tiene autocorrelación $R_n[n] * R_x[n] * R_d[n]|_{n=kN}$.

Recepción adaptada al multicamino

Canal con multicamino $d[m] = a\delta[m] + b\delta[m - m_0]$ $0 < m_0 < N$

$$\begin{aligned} R_d[m] &= d[m] * d^*[-m] \\ &= (|a|^2 + |b|^2) \delta[m] + ab^* \delta[m + m_0] + a^* b \delta[m - m_0] \end{aligned}$$

$$R_x[m] * R_d[m] = (|a|^2 + |b|^2) R_x[m] + ab^* R_x[m + m_0] + a^* b R_x[m - m_0]$$

$$\tilde{p}[k] = (|a|^2 + |b|^2) R_x[kN] + ab^* R_x[kN + m_0] + a^* b R_x[kN - m_0]$$

Recepción adaptada al multicamino

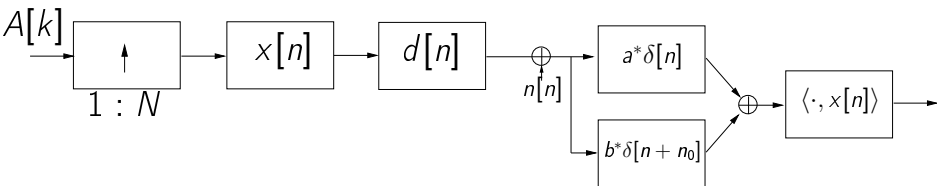
Como $x[n]$ es nula fuera de $\{0, \dots, N-1\}$, $R_x[n]$ es nula fuera de $\{-N+1, \dots, N-1\}$, la señal $\tilde{p}[k]$ tiene sólo tres muestras no nulas:

$$\begin{aligned}\tilde{p}[k] &= \left[(|a|^2 + |b|^2) R_x[0] + ab^* R_x[m_0] + a^* b R_x[-m_0] \right] \delta[k] \\ &\quad + ab^* R_x[-N + m_0] \delta[k + 1] + a^* b R_x[N - m_0] \delta[k - 1] \\ &\approx (|a|^2 + |b|^2) R_x[0] \delta[k] \\ &= (|a|^2 + |b|^2) N \delta[k]\end{aligned}$$

Recepción adaptada al multicamino

El sistema se suele representar de la forma siguiente, por lo que se denomina **receptor en rastrillo (rake)**

(para $d[m] = a \delta[m] + b \delta[m - m_0]$).



Detección monousuario en notación vectorial

Para plantear más adelante la detección multiusuario resultará útil escribir la detección monousuario en forma vectorial.

Recordamos que

$$\tilde{x}[n] = x[n] * d[n]$$

Definimos los vectores

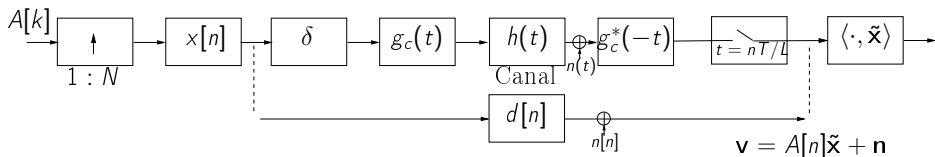
$$\mathbf{x} = [x[0], \dots, x[N-1]]$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}[0], \dots, \tilde{x}[M-1]]$$

$$\mathbf{n} = [n[0], \dots, n[M-1]]$$

Detección monousuario en notación vectorial

Despreciamos la IES, con lo que consideramos un símbolo aislado.



Suponemos que en el receptor calculamos el producto escalar con \tilde{x} (receptor adaptado al multicamino), con lo que obtenemos

$$\langle v, \tilde{x} \rangle = \langle A[k]\tilde{x} + n, \tilde{x} \rangle = \|\tilde{x}\|^2 A[k] + \underbrace{\langle n, \tilde{x} \rangle}_{n[k]}$$

Receptor multiusuario

Ahora consideramos K transmisores y un receptor, con canal $d_k[n]$ entre el transmisor k y el receptor.

Suponemos que el transmisor k emite una única amplitud A_k (es decir, seguimos despreciando la IES).

Definimos $\tilde{x}_k[n] = x_k[n] * d_k[n]$, $\tilde{\mathbf{x}}_k = [\tilde{x}_k[0], \dots, \tilde{x}_k[M-1]]$.

Tenemos

$$r[m] = \sum_k A_k \tilde{x}_k[m] + n[m]$$

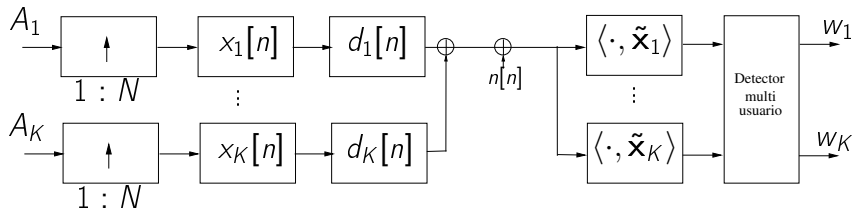
con $n[m]$ blanco.

La detección para el usuario l se hace en base a los productos escalares

$$\langle r[m], \tilde{x}_l[m] \rangle = \sum_k A_k \langle \tilde{x}_k[m], \tilde{x}_l[m] \rangle + \langle n[m], \tilde{x}_l[m] \rangle$$

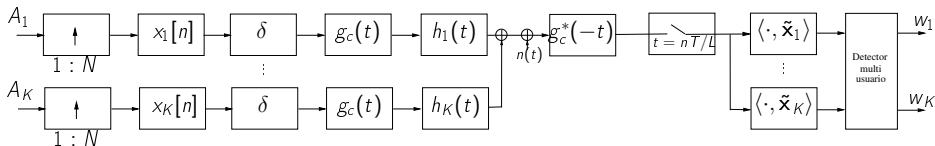
Receptor multiusuario

Diagrama equivalente discreto



Receptor multiusuario

El mismo diagrama, detallado al nivel de señal de tiempo continuo



Detección multiusuario

Suponemos que los distintos transmisores utilizan señales $x_k[n]$ ortogonales o aproximadamente ortogonales.

En el receptor después de filtrado y muestreo tenemos

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^K A_k \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{n}$$

Si los canales fueran ideales ($d_k[n] = \delta[n]$) tendríamos $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k$ y podríamos recuperar las A_I con los productos escalares

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_I \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^K A_k \mathbf{x}_k + \mathbf{n}, \mathbf{x}_I \right\rangle = \|\mathbf{x}_I\|^2 A_I + \underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{x}_I \rangle}_{n_I}$$

y los n_I serían independientes de varianza $\|\mathbf{x}_I\|^2 N_0$.

Detección multiusuario

Con canales no ideales a la entrada del detector multiusuario tenemos los productos escalares

$$\langle \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{x}}_l \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^K A_k \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{x}}_l \right\rangle$$

Definimos la matriz

$$\tilde{\mathbf{X}} = [\tilde{\mathbf{x}}_1 \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{x}}_K]$$

A la salida del muestreo tenemos el vector

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^K A_k \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{X}} \underbrace{[A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_K]^T}_{\mathbf{A}} + \mathbf{n}$$

Tras calcular los productos escalares obtenemos

$$\tilde{\mathbf{X}}^H \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{X}}^H (\tilde{\mathbf{X}} \mathbf{A} + \mathbf{n}) = \underbrace{\tilde{\mathbf{X}}^H \tilde{\mathbf{X}}}_{\tilde{\mathbf{R}}} \mathbf{A} + \tilde{\mathbf{X}}^H \mathbf{n}$$

Detección multiusuario

Para estimar \mathbf{A} a partir de $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{A} + \mathbf{z}$, $\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{X}}^H \mathbf{n}$ tenemos las opciones siguientes:

- 1 Aplicar $\tilde{\mathbf{R}}^{-1}$ (**criterio ZF o decorrelador**). El problema es que amplifica el ruido.
- 2 Utilizar el estimador lineal óptimo (**criterio MMSE**), es decir, la matriz \mathbf{G} que minimiza

$$E \left[\|\mathbf{A} - \mathbf{GB}\|^2 \right]$$

que es

$$\mathbf{G} = \Sigma_A \tilde{\mathbf{R}}^H \left(\tilde{\mathbf{R}} \Sigma_A \tilde{\mathbf{R}}^H + \Sigma_z \right)^{-1}$$

Detección multiusuario

Como las matrices de covarianzas de la señal y del ruido son

$$\Sigma_A = \sigma_A^2 \mathbf{I}$$

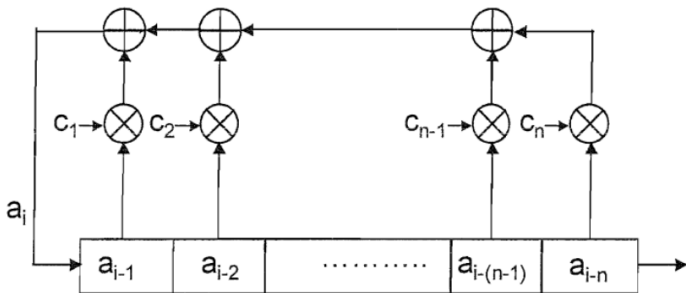
$$\begin{aligned}\Sigma_z &= E[\mathbf{z}\mathbf{z}^H] = E[\tilde{\mathbf{X}}^H \mathbf{n}\mathbf{n}^H \tilde{\mathbf{X}}] = \tilde{\mathbf{X}}^H E[\mathbf{n}\mathbf{n}^H] \tilde{\mathbf{X}} \\ &= \tilde{\mathbf{X}}^H \Sigma_n \tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{X}}^H (\sigma_n^2 \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{X}} = \sigma_n^2 \tilde{\mathbf{R}}\end{aligned}$$

Tenemos

$$\mathbf{G} = \sigma_A^2 \tilde{\mathbf{R}}^H \left(\sigma_A^2 \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{R}}^H + \sigma_n^2 \tilde{\mathbf{R}} \right)^{-1} = \tilde{\mathbf{R}}^H \left(\tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{R}}^H + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_A^2} \tilde{\mathbf{R}} \right)^{-1}$$

Secuencias de longitud máxima

Las **secuencias de longitud máxima**, también denominadas **secuencias-m**, **secuencias seudoaleatorias** o **secuenciasseudoruido** se basan en un registro de desplazamiento realimentado basado en aritmética módulo dos.



Secuencias de longitud máxima

- El sistema de la figura anterior genera necesariamente una secuencia periódica, puesto que los posibles contenidos del registro de desplazamiento son un conjunto finito.
- Para algunas elecciones de los coeficientes, partiendo de un contenido inicial no nulo del registro, este contenido va pasando por todas las $2^n - 1$ palabras no nulas de n bits.
- La salida del registro en este caso es una secuencia periódica del máximo periodo posible. Por eso se denominan **secuencias de longitud máxima (SLM)**.
- Como secuencia de ensanchamiento $x[m]$ se puede utilizar **un periodo** cualquiera de una de estas secuencias, asignando los valores 0, 1 a las amplitudes $+1, -1$.

Propiedades de las SLM

Propiedades de las SLM:

- Las secuencias que generan **distintas inicializaciones** del registro corresponden a **versiones desplazadas** de la misma secuencia periódica (puesto que se trata de un sistema que va pasando de forma determinista por todos los posibles estados (contenidos del registro de desplazamiento)).
- La **suma de dos SLM distintas** correspondientes a distintas inicializaciones del mismo registro **es otra SLM** (puesto que la secuencia depende linealmente de la inicialización del registro).
- Tienen 2^{n-1} **unos** y $2^{n-1} - 1$ **ceros** (porque en su generación el registro va conteniendo todas las palabras de n bits menos la nula, y la secuencia está formada por los primeros bits de estas palabras.)

Propiedades de las SLM

- La **correlación circular** de una secuencia de ensanchamiento $x[m]$ de longitud $N = 2^n - 1$ dada por una SLM, con extensión periódica $\tilde{x}[m]$ vale

$$\tilde{R}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\tilde{x}[m-n] = \begin{cases} N & n = kN, \text{ } k \text{ entero} \\ -1 & \text{demás casos} \end{cases}$$

Propiedades de las SLM

En efecto,

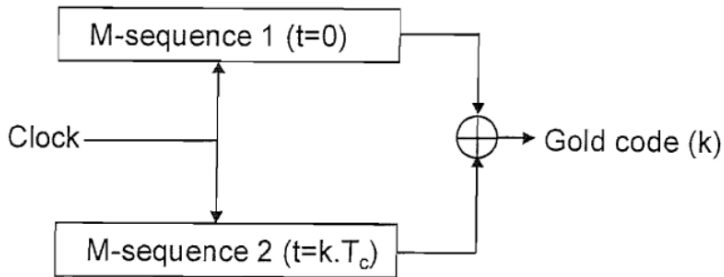
- $\tilde{R}[n]$ es igual al número de coincidencias menos el número de discrepancias de $x[m]$ y $\tilde{x}[m - n]$
- El número de discrepancias es el número de unos de $x_b[m] + \tilde{x}_b[m - n]$ (versiones binarias), que es un periodo de otra SLM, luego es $2^{n/2}$.
- Tenemos por tanto $\tilde{R}[n] = 2^{n/2} - 1 - 2^{n/2} = -1$.

Sin embargo, la **correlación ordinaria**, que es la que importa en nuestro caso, no es tan buena. Ésta es óptima para las secuencias de Barker.

Códigos Gold

Son secuencias con correlación circular cruzada mínima.

Se pueden utilizar como secuencias con correlación cruzada ordinaria pequeña, aptas por tanto para sistemas multiusuario.



- No son SLM, por lo que la autocorrelación periódica no es tan buena.
- Pero para secuencias de longitud $2^n - 1$
 - ▶ tanto la autocorrelación periódica con desplazamiento no nulo
 - ▶ como la correlación cruzada periodica

$$\tilde{R}_{xy}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\tilde{y}[m-n]$$

están acotadas por

$$2^{(n+2)/2} + 1$$